

SUDOKU

		3				2		
	1	7	5		2	8	6	
2			4		6			3
5				9				4
	2						1	
	8						7	
		9				5		
			1	6	3			
				7				

Marcin Maciaga © 2009

Strona internetowa: <http://d-artagnan.webpark.pl>; adres mejlowy: d-artagnan@wp.pl

Pierwsze sudoku opublikowano w 1979 r. w Stanach Zjednoczonych. Łamigłówka ta cieszyła się dużą popularnością w latach 90-tych w Japonii, jednak międzynarodową sławę zyskała dopiero w ostatnim czasie. W Polsce po raz pierwszy sudoku ukazało się w czerwcu 2005 r. w specjalnym dodatku do tygodnika „Polityka”, a już pod koniec tego roku odbyły się I Mistrzostwa Polski w rozwiązywaniu sudoku, które stanowiły jednocześnie eliminacje krajowe do I Mistrzostw Świata, które odbyły się wiosną 2006 r. we Włoszech. Łamigłówkę obecnie można znaleźć dosłownie wszędzie, m.in. w serwisach internetowych, telefonach komórkowych, na stronach tygodnika „Angora”, czy takich dzienników jak: „Dziennik-Gazeta Prawna”, „Polska-The Times”, „Życie Warszawy”, a swego czasu również na stronach „Gazety Wyborczej”, z których nierzadko na dobre wyparła tradycyjną krzyżówkę. Tylko ten, kto pamięta lata 80-te ub. wieku zrozumie, dlaczego sudoku ochrzczono mianem kostki Rubika XXI wieku!

Zasady tej niezwykłej łamigłówki są proste. Cyframi od 1 do 9 należy uzupełnić diagram o wymiarach 9×9 w taki sposób, aby w każdym poziomym wierszu (9×1), pionowej kolumnie (1×9) oraz wyróżnionym pogrubioną linią kwadracie (3×3) cyfry się nie powtarzały.

Mimo, że łamigłówka na pozór wydaje się banalna, ponieważ nie wymaga od rozwiązującego wykonywania żadnych rachunków matematycznych (sposrzeżenie, że suma cyfr w każdym kwadracie, rzędzie i kolumnie jest stała i wynosi 45 nic tu nie pomoże), to w rzeczywistości bez umiejętności logicznego myślenia jej rozwiązanie jest często wręcz niewykonalne. Zasadniczo, proces rozwiązywania sudoku składa się z trzech etapów: **skanowania diagramu**, **wypełniania wolnych kratek** i **analizy**. W trakcie skanowania diagramu szukamy pojedynczych wolnych kratek, w które od razu można wpisać szukane przez nas cyfry (metody I÷III). Wypełnianie wolnych kratek polega na wpisywaniu małą czcionką wszystkich możliwych do wystąpienia w nich cyfr (metody IV÷V), które w trakcie analizy kolejno eliminuje się, by w kratce pozostała tylko ta jedna

właściwa dla niej cyfra, którą wpisujemy wówczas do tej kratki dużą czcionką (metody VI÷X). Znajomość pierwszych trzech metod wystarcza do rozwiązania łatwego sudoku natomiast by rozwiązać trudniejszą łamigłówkę w tym piekielnie trudną niezbędna jest znajomość pozostałych metod. Poniżej ich szczegółowy opis.

Etap skanowania diagramu (metody I÷III)

Metoda I

Metoda I polega na szukaniu dla wybranej cyfry pojedynczych wolnych kratek w obrębie kwadratów (w których jej jeszcze nie ma) poprzez eliminowanie w pamięci całych wierszy oraz kolumn, w których ta cyfra już występuje lub musi wystąpić (patrz – metoda VI) (rys. 1). Skanowanie diagramu za pomocą tej metody można rozpocząć od cyfry o najmniejszej wartości, od ostatnio wpisanej lub od najczęściej występującej, a następnie powtórzyć je z osobna dla każdej z pozostałych ośmiu cyfr.

8	5					6	9
	7			3		1	
			9	1	5		
		2	3		4	6	
7							3
		5	7		8	1	
			1	2	3		
	3			8		7	
1	9					3	5

Rys. 1. Eliminując w pamięci całe wiersze oraz kolumny, w których występuje lub musi wystąpić cyfra 1 (szare kreski) w obrębie kwadratów (w których tej cyfry jeszcze nie ma) szukamy pojedyncze wolne kratki, w które od razu można wpisać tę cyfrę (szare pola). Skanowanie diagramu za pomocą tej metody powtarzamy następnie z osobna dla każdej z pozostałych ośmiu cyfr.

Metoda II

Metoda II polega na szukaniu w wierszach, kolumnach lub kwadratach pojedynczych wolnych krater, w które od razu można wpisać brakujące cyfry, ponieważ pozostałe wolne kratki leżą w wierszach lub kolumnach, w których ta cyfra już występuje lub musi wystąpić (patrz – metoda VI) (rys. 2). Skanowanie diagramu za pomocą tej metody najlepiej jest rozpocząć od najbardziej uzupełnionych wierszy, kolumn lub kwadratów.

	1		6		5	
4		2				
	3		7	8		5
6		7				

Rys. 2. Licząc w pamięci od 1 do 9, dla pierwszej brakującej cyfry 5 w lewym górnym kwadracie poprzez eliminowanie w pamięci całych wierszy oraz kolumn, w których ta cyfra już występuje lub musi wystąpić (szare kreski) szukamy w tym kwadracie pojedynczej wolnej kratki, w którą od razu można wpisać tę cyfrę (szare pole). Szukanie wolnych krerek powtarzamy dla pozostałych brakujących cyfr w tym kwadracie, tj. 6, 7, 8 i 9, a następnie można je powtórzyć w pozostałych kwadratach, a także w wierszach i kolumnach, najlepiej zaczynając od tych najbardziej uzupełnionych.

Metoda III

Metoda III polega na szukaniu wolnych krerek na całym diagramie, w które od razu można wpisać brakujące cyfry, ponieważ pozostałe cyfry już się znajdują lub muszą wystąpić (patrz – metoda VI) w wierszu, kolumnie lub kwadracie, w którym leży ta kratka (rys. 3). Skanowanie diagramu za pomocą tej metody najlepiej jest rozpocząć od wolnych krerek leżących na skrzyżowaniu wierszy i kolumn oraz występujących w obrębie kwadratów najbardziej uzupełnionych.

			1			
5		6	4		2	7
			3			

Rys. 3. Licząc w pamięci od 1 do 9, szukamy brakującej cyfry 9, którą od razu można wpisać w wolną kratkę leżącą w środkowym wierszu i kwadracie (szare pole), ponieważ pozostałe cyfry już się znajdują lub muszą wystąpić w wierszu, kolumnie lub kwadracie, w którym leży ta kratka. Skanowanie diagramu za pomocą tej metody można następnie powtórzyć dla kolejnych wolnych krerek, najlepiej zaczynając od krerek leżących w najbardziej uzupełnionych wierszach, kolumnach lub kwadratach.

Proces skanowania diagramu za pomocą metody I dla wszystkich dziewięciu cyfr zajmuje około 2 min i niezależnie od stopnia trudności sudoku zawsze zostaje ujawnionych kilka cyfr. W przypadku łatwego sudoku istnieje nawet możliwość całkowitego rozwiązania łamigłówki wyłącznie za pomocą tej metody. Jednak, gdy jest już dość dużo cyfr ujawnionych na diagramie, to lepiej jest skorzystać z metody II. Skanowanie diagramu za pomocą tej metody zajmie około 4 min, lecz niemalże od razu pozwoli nam rozwiązać łatwe sudoku. Istnieje również możliwość połączenia obydwu tych metod w ten sposób, że po wpisaniu cyfry za pomocą metody II przeprowadza się na chwilę skanowanie diagramu za pomocą metody I, ale tylko dla ostatnio wpisanej cyfry. Znajomość obydwu tych metod wystarczy tylko do rozwiązania łatwego sudoku, co nie powinno trwać dłużej niż 10 min. Jeżeli obydwie te metody nie pozwalają na odsłonięcie na diagramie żadnej więcej cyfry, to przed przystąpieniem do wypełniania wolnych krerek wszystkimi mogącymi wystąpić w nich cyframi, co jest dość czasochłonne, można spróbować jeszcze skanowania diagramu za pomocą metody III. Zajmie to nam nie więcej niż 1 min, a można w ten sposób zaoszczędzić czasem nawet kilka minut.

Etap wypełniania wolnych krater (metody IV÷V)

Metoda IV

Eliminując w pamięci dla kolejnych z osobna cyfr całe wiersze i kolumny, w których te cyfry występują lub muszą wystąpić (patrz – metoda VI), wypełniamy tymi cyframi wszystkie wolne kratki.

Metoda V

Licząc w pamięci od 1 do 9 próbujemy brakującymi cyframi uzupełnić każdy z osobna kwadrat upewniając się tylko, czy dana cyfra nie występuje lub musi wystąpić (patrz – metoda VI) w wierszu lub kolumnie, do której mamy ją wpisać.

Metody IV i V są analogiczne do wcześniej omówionych metod I i II, z tą tylko różnicą, że wtedy szukaliśmy pojedynczych wolnych krater, w które od razu można było wpisać cyfrę, a tu wypełniamy wszystkie wolne kratki wszystkimi mogącymi wystąpić w nich cyframi. Z tej też przyczyny, by nie powtarzać w myślach tych samych operacji najpierw podczas skanowania diagramu za pomocą metod I lub II, a później jeszcze wypełniania wolnych krater w przypadku sudoku trudniejszego zaleca się od razu od przystąpienia do rozwiązywania łamigłówki za pomocą metody IV lub V. W przypadku sudoku łatwego nie ma takiej potrzeby, bowiem prościej jest znaleźć cyfrę, którą od razu można wpisać do kratki, aniżeli wszystkie kratki wypełnić wszystkimi mogącymi wystąpić w nich cyframi by następnie odwoływać się jeszcze do metod analizy.

Nasuwa się pytanie, od której metody IV, czy V lepiej jest rozpocząć rozwiązywanie sudoku trudniejszego? Wypełniając diagram za pomocą metody V, po wypełnieniu cyframi pojedynczego wiersza, kolumny lub kwadratu od razu identyfikujemy kratki wypełnione tylko jedną cyfrą, którą można wtedy wpisać do kratki dużą czcionką (rys. 4). Umożliwia to podjęcie próby rozwiązania sudoku za pomocą metod skanowania (np. za pomocą metody I można przeprowadzić skanowanie diagramu tylko dla ostatnio wpisanej cyfry, zaś za pomocą metody II tylko dla wierszy, kolumn lub kwadratów do których ta ostatnia cyfra została wpisana) bez konieczności wypełniania pozostałych wolnych krater na całym diagramie. Metoda ta może się sprawdzić, jeżeli cyfr na początku jest stosunkowo dużo ujawnionych, bo wówczas istnieje duże prawdopodobieństwo, że rozwiązanie jednego wiersza, kolumny lub kwadratu w sposób lawinowy pozwoli odsłonić pozostałe cyfry na diagramie. Minusem metody V jest to, że zabiera ona więcej czasu od metody IV, ponieważ wypełniamy każdy z osobna wiersz, kolumnę lub kwadrat i za każdym razem sprawdzamy, czy występuje, czy też musi wystąpić cyfra w danym wierszu, kolumnie lub kwadracie. Za pomocą metody IV wykonujemy te operacje dla jednej cyfry za jednym podejściem. Wniosek z tego taki, że jeśli wypełnianie wolnych krater wszystkimi mogącymi wystąpić w nich cyframi jest nieuniknione, a tak jest prawie zawsze w przypadku sudoku bardzo trudnego, to lepiej jest przystąpić do jego rozwiązywania od razu za pomocą metody IV.

2347	8	2347	5679	1	5679			
5	13	6	4	9	2	7		8
1247	9	1247	5678	3	5678			

Rys. 4. Wypełnienie cyframi wszystkich wolnych krutek leżących w środkowym kwadracie za pomocą metody V pozwala od razu zidentyfikować kratkę z wypełnioną tylko jedną cyfrą 9 (szare pole). Ponieważ jest to jedyna cyfra, które może wystąpić w tej kratce, można ją wpisać dużą czcionką i usunąć ją z pozostałych krutek w których również mogła

wystąpić (ciemne pola).

Wypełnianie wolnych krutek wszystkimi mogącymi wystąpić w nich cyframi zwykle sprowadza się do wpisywania cyfr małą czcionką od lewej strony u dołu każdej z krutek (rys. 5). Jednak zamiast cyfr można również stawiać kropki w odpowiednich miejscach w kratce w ten sposób, że kropki z górnego wiersza kratki odpowiadają cyfrom od 1 do 3, ze środkowego – od 4 do 6, zaś z dolnego wiersza cyfrom od 7 do 9 (rys. 5).

1569	1568	1569
7	3	1569
4	1568	2

•	•	•
• •	• •	• •
•	•	•
7	3	• •
•	• •	•
4	• •	2
	•	

Rys. 5. Wypełnianie wolnych krutek wszystkimi mogącymi wystąpić w nich cyframi można przeprowadzić w sposób tradycyjny wpisując cyfry małą czcionką od lewej strony u dołu każdej z krutek (lewy diagram) lub stawiając kropki w odpowiednich miejscach w kratce w ten sposób, że kropki z górnego wiersza kratki odpowiadają cyfrom od 1 do 3, ze środkowego – od 4 do 6, zaś z dolnego wiersza cyfrom od 7 do 9 (prawy diagram).

Na uwagę zasługuje jeszcze możliwość wypełniania krutek kropkami odpowiadającymi cyfrom, które w danej kratce nie mogą się już znaleźć. Jednak i tak ani ta idea, ani sama technika stawiania kropek nie usprawnia procesu rozwiązywania sudoku w żaden sposób, chociaż może okazać się cenna, gdy diagram sudoku jest mały i brakuje miejsca na wypełnianie go cyframi, co jest nieuniknione w przypadku sudoku trudniejszego.

Etap analizy (metody VI÷X)

Strategia, którą posługiwaliśmy się do tej pory polegała na szukaniu wolnych krutek, w które od razu można było wpisać szukane przez nas cyfry. Od tej pory, po wypełnieniu wolnych krutek wszystkimi mogącymi wystąpić w nich cyframi, nasze podejście będzie polegało na eliminowaniu poszczególnych cyfr z tych krutek by pozostawić tylko tę jedną właściwą dla danej kratki cyfrę.

Metoda VI

W niektórych sytuacjach jest wiadomo, że dana cyfra nie może wystąpić w jakiejś kratce mimo, że w wierszu, kolumnie lub kwadracie, w którym leży ta kratka, cyfra ta jeszcze się nie znajduje. Mogą to być następujące sytuacje:

	3	2			6	1		
789			478	4578			4589	78
4	1							
		5689	2378	3578	2357	23679	23589	23678
678	78	568	9		1			
			34578			23467	23458	23678

Rys. 6a. W środkowym kwadracie cyfra 2 musi wystąpić w jednej z dwóch krutek w środkowym wierszu (szare pola), co pozwala wykreślić ją z pozostałych krutek leżących w tym samym wierszu (ciemne pola).

6	1	7		4	8			
			25			259	39	23
4			1		3			8
	259	259		5679		2579	679	
						1		4
23589	23589	2359	2567	5679	2679		679	

Rys. 6b. W górnym wierszu cyfra 9 musi wystąpić w jednej z dwóch krutek w prawym kwadracie (szare pola), co pozwala wykreślić ją z pozostałych krutek leżących w tym samym kwadracie (ciemne pola).

1	2	3	4		6			9
				78		578	578	
		4		1			2	
5678	5678		35789		35789	3578		3578
		9		2		1		6
578	578		3578		3578		34578	

Rys. 6c. W lewym i środkowym kwadracie cyfra 5 może wystąpić tylko w dolnym i środkowym wierszu, dlatego też w prawym kwadracie cyfra ta musi wystąpić w jednej z dwóch krutek w górnym wierszu (szare pola), co pozwala wykreślić ją z pozostałych krutek leżących w tym samym kwadracie (ciemne pola).

W każdej z powyższych sytuacji zawężona zostaje ilość krutek, w których może wystąpić dana cyfra. Na sytuacje te można było już natrafić podczas skanowania diagramu oraz wypełniania wolnych krutek wszystkimi mogącymi wystąpić w nich cyframi. W trakcie skanowania diagramu za pomocą metody I lub II eliminując w pamięci całe wiersze lub kolumny w których dana cyfra już się znalazła rozsądnie byłoby jednocześnie wziąć pod uwagę te sytuacje, w których ona musi się znaleźć (rys. 6). Natomiast przy wypełnianiu wolnych krutek za pomocą analogicznych metod IV i V można ograniczyć się tylko do eliminacji w pamięci wierszy lub kolumn, w których dana cyfra już się znajduje. Wtedy proces wypełniania wolnych krutek przebiega szybciej, jednak więcej cyfr będzie wypełniać poszczególne kratki, a poza tym oddzielnie będzie trzeba sprawdzić diagram pod kątem jednej z powyższych sytuacji przedstawionych na rysunku 6. Dla ludzi łatwiej jest połączyć obydwie te metody, ale przy pisaniu algorytmu programu komputerowego do rozwiązywania sudoku należy te dwie metody rozgraniczyć.

Metoda VII

Podstawową metodą służącą do eliminacji cyfr, które wypełniają wolne kratki leżące w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie jest identyfikacja gołych lub ukrytych dubletów lub trypletów.

- Goły dublet stanowią dwie cyfry oznaczone umownie jako a i b, które wypełniają dwie wolne kratki leżące w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie w następującym układzie [ab][ab] (rys. 7).
- Ukryty dublet stanowią dwie cyfry a i b, które wypełniają jedynie dwie wolne kratki leżące w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie w następującym układzie [ab][ab] i które występują w tych kratkach razem z innymi jeszcze cyframi (rys. 7).

1	2	3	4	56	56	7	5689	5689
---	---	---	---	----	----	---	------	------

Rys. 7. Cyfry 5 i 6, które wypełniają dwie wolne kratki leżące w środkowej części wiersza w układzie [56][56] (szare pola) stanowią goły dublet. Oznacza to, że cyfry te mogą wystąpić

tylko w tych dwóch kratkach, co umożliwia wykreślenie ich z pozostałych kratek leżących w tym samym wierszu (ciemne pola). Możliwe jest również alternatywne podejście. Mianowicie, cyfry 8 i 9, które wypełniają jedynie dwie wolne kratki leżące w prawej części wiersza w układzie [89₅₆][89₅₆] (ciemne pola) stanowią ukryty dublet. Oznacza to, że cyfry 5 i 6 nie mogą wystąpić już w tych kratkach i można je stamtąd wykreślić.

- Goły tryplet stanowią trzy cyfry oznaczone umownie jako a, b i c, które wypełniają trzy wolne kratki leżące w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie w jednym z następujących układów: [abc][abc][abc], [abc][abc][ab/ac/bc], [abc][ab/ac][bc] lub [ab][bc][ac] (rys. 8).
- Ukryty tryplet stanowią trzy cyfry a, b i c, które wypełniają jedynie trzy wolne kratki leżące w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie w jednym z następujących układów: [abc][abc][abc], [abc][abc][ab/ac/bc], [abc][ab/ac][bc] lub [ab][bc][ac] i które występują w tych kratkach razem z innymi jeszcze cyframi (rys. 8).

1	2	3	456	456	456	56789	56789	56789
---	---	---	-----	-----	-----	-------	-------	-------

Rys. 8. Cyfry 4, 5 i 6, które wypełniają trzy wolne kratki leżące w środkowej części wiersza w układzie [456][456][456] (szare pola) stanowią goły tryplet. Oznacza to, że cyfry te

mogą wystąpić tylko w tych trzech kratkach, co umożliwia wykreślenie ich z pozostałych kratek leżących w tym samym wierszu (ciemne pola). Możliwe jest również alternatywne podejście. Mianowicie, cyfry 7, 8 i 9, które wypełniają jedynie trzy wolne kratki leżące w prawej części w układzie [789₅₆][789₅₆][789₅₆] (ciemne pola) stanowią ukryty tryplet. Oznacza to, że cyfry 5 i 6 nie mogą wystąpić już w tych kratkach i można je stamtąd wykreślić.

Eliminacja cyfr za pomocą tej metody jest możliwa, ponieważ jeżeli w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie leżą dwie wolne kratki, które wypełnione są dwiema identycznymi cyframi (goły dublet) lub trzy kratki wypełnione trzema identycznymi cyframi (goły tryplet), to oznacza to, że cyfry te mogą wystąpić tylko w tych kratkach, co umożliwia wykreślenie ich z pozostałych kratek leżących w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie. Również, jeżeli w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie leżą dwie wolne kratki z charakterystycznymi dla tych kratek dwiema cyframi (ukryty dublet) lub trzy kratki z trzema charakterystycznymi dla tych kratek cyframi (ukryty tryplet), to oznacza to, że inne cyfry nie mogą wystąpić w tych kratkach i można je stamtąd wykreślić.

W trakcie rozwiązywania łamigłówek jedynie koncentrujemy się na szukaniu gołych lub ukrytych dubletów lub trypletów, chociaż wyróżnić można jeszcze układy z jedną cyfrą, tzw. singlety (przypadek trywialny), czterema – kwartetami, pięcioma – pentetami, sześcioma – sektetami, siedmioma – septetami, czy nawet ośmioma cyframi – oktety. Poza tym przy omawianiu tego rodzaju układów cyfr występujących w kratkach leżących w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie należy jeszcze zwrócić uwagę na następujące układy:

A 67	38	2	1	37	4	5	89	689
45	38	9	2	35	6	7	48	1
2	B	X	8	C	9	3	2	46
	567	457		57				

Rys. 9a. W kratce X (ciemne pole) nie może wystąpić cyfra 7, ponieważ cyfra ta musi wystąpić albo w kratce A albo w B lub C (jeżeli w kratce A wystąpi 6, to w B i C wystąpi para tych samych cyfr 5 i 7).

23	9	4	123	8	5	6	27	137
23	7	5	4	6	A	8	9	B
8	1	6	9	C	7		5	X
				23		24		34

Rys. 9b. W kratce X (ciemne pole) nie może wystąpić cyfra 3, ponieważ w kratce B musiałaby wystąpić wtedy cyfra 1, A – 2, zaś w C – 3, co prowadziło do błędu (w kratkach X i C wystąpiłyby dwie te same cyfry).

1479	8	4579	13579	2	157	35	49	6
2	6	A	4	8	39	35	1	7
X	3	B	6	C		8	D	2
1479		4579		79	157		49	

Rys. 9c. W kratce X (ciemne pole) nie może wystąpić cyfra 9, ponieważ w kratce A musiałaby wystąpić wtedy cyfra 5, C – 7, D – 4, co prowadziło do błędu (do kratki B nie pasowałaby żadna cyfra).

Metoda VIII

Sudoku z czterema wolnymi kratkami leżącymi w dwóch wierszach, dwóch kolumnach i dwóch kwadratach, które wypełnione są dwiema tymi samymi cyframi ma dwa rozwiązania, ponieważ niezależnie od tego, w których kratkach wystąpią te cyfry, to i tak nie będzie miało to żadnego wpływu na umiejscowienie pozostałych cyfr w innych wolnych kratkach (rys. 10).

A			B
ab			ab
C			D
ab			ab

Rys. 10. Sudoku z czterema wolnymi kratkami A, B, C i D leżącymi w dwóch wierszach, dwóch kolumnach i dwóch kwadratach, które wypełnione są dwiema tymi samymi cyframi a i b ma dwa rozwiązania, ponieważ niezależnie od tego, czy cyfra a wystąpi w kratkach A i D, czy B i C, zaś cyfra b odpowiednio w kratkach B i C lub A i D, to i tak nie będzie miało to żadnego wpływu na umiejscowienie pozostałych cyfr w innych wolnych kratkach.

Wszystkie publikowane diagramy sudoku posiadają (a bynajmniej powinny) tylko jedno rozwiązanie. Możemy zatem założyć, że jeżeli sudoku ma tylko jedno rozwiązanie, to nie może w nim wystąpić wyżej omówiony układ czterech wolnych krutek leżących w dwóch wierszach, dwóch kolumnach i dwóch kwadratach, w którym każda z krutek jest wypełniona dwiema tymi samymi cyframi. Założenie to jest podstawą rozwiązywania sudoku za pomocą metody VIII (rys. 11).

9	2	4		7		5	8	3
3	6	X	A	5	B	4		1
5			Y	4	Z		6	2
6		2		9	4		5	8
7	9	5		1		2	3	4
			5	2		6		9
	7			3	5		2	6
2				6				5
1	5	6	C	8	D	3	4	7

Rys. 11. Jeżeli kratki A, B, C i D (szare pola) wypełnione byłyby tylko cyframi – 2 i 9, to sudoku takie miałyby dwa rozwiązania. Ponieważ wszystkie publikowane diagramy sudoku posiadają (a bynajmniej powinny) tylko jedno rozwiązanie, to można przyjąć że albo w kratce A albo B musi znaleźć się cyfra 8. Tym samym, z kratek X, Y i Z (ciemne pola) można wykreślić cyfrę 8 pozostawiając w kratce X samą 7, co pozwala szybko uzupełnić cały diagram.

Metoda IX

1	A	B			8	X	7	Y
4	9	7	1	6	3	5	8	2
5		C	2	7	9	4	J	1
2	5	6	7	3	4	1	9	8
8	1	4	H	9	2	7	I	
7	3	9	8	G	F	2	4	
6	7			8	5			
3	4	D		2	E		5	7
9		5			7			

Rys. 12. Między połączonymi ze sobą w łańcuszek kratkami od A do J (szare pola i kreski) zachodzi relacja, że jeśli w kratce A wystąpi cyfra 2, to w B znajdzie się 3, C – 8, D – 1, E – 6, F – 1, G – 5, H – 6, I – 3, J – 6, natomiast jeśli w kratce A wystąpi 6, to w B znajdzie się 2, C – 3, D – 8, E – 1, F – 6, G – 1, H – 5, I – 6, zaś w J – 3. Z relacji tej wynika, że jeśli w kratce A wystąpi cyfra 2, to w J znajdzie się 6, natomiast jeśli w A – 6, to w J – 3. Pozwala to wyciągnąć wniosek, że cyfra 6 musi znaleźć się albo w kratce A albo J, co tym samym umożliwia wykreślenie jej z kratek X i Y (ciemne pola), które leżą w tym samym wierszu, co kratka A oraz tym samym kwadracie, co kratka J. W kratce Y pozostanie już tylko cyfra 9, którą będzie można wpisać do kratki dużą czcionką.

7	A	3	4	1	5	9	B	8
9	8	4	2	6	7	5	1	3
1	5	C			8	D	7	4
8	4			5			3	9
	1		8		9	E	4	
	9		7	4			8	X
4	3	9		8		Y	5	1
F	7	1	5	4	3	8	9	G
5	H	8				3	4	

Rys. 13. Między kratkami od A do G tworzącymi ścieżkę zachodzi relacja, taka że cyfry 2 i 6 występują w tych kratkach na przemian, i tak dla przykładu jeśli w kratce A wystąpi cyfra 2, to w sąsiadującymi z nią kratkami B, C i H znajdzie się 6, zaś w D, E i F – 2, natomiast jeśli w kratce A wystąpi 6, to w B, C i H znajdzie się 2, zaś w D, E i F – 6. Z relacji tej wynika, że jeśli w kratce D lub E wystąpi cyfra 2, to w G znajdzie się 6 i na odwrót, jeśli w kratce G – 2, to w D i E – 6. Pozwala to wyciągnąć wniosek, że cyfry 2 i 6 muszą równocześnie wystąpić w kratkach D i E oraz G, co tym samym umożliwia wykreślenie ich z kratki X (ciemne pole), która leży w tym samym kwadracie, co kratka E i tej samej kolumnie, co G oraz kratki Y (ciemne pole), która leży w tej samej kolumnie, co kratka D i tym samym kwadracie, co G. W kratce X pozostanie już tylko cyfra 5, zaś w Y – 7, które będzie można wpisać dużą czcionką.

Z obydwu powyższych przykładów można wyciągnąć następujące wnioski:

- **Łańcuszek lub sieć jest utworzona z kratek między którymi zachodzi relacja, że jeśli w pierwszej kratce wystąpi jakaś cyfra, to w drugiej sąsiadującej z nią kratce (leżącej w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie) cyfra ta już nie może wystąpić, co z kolei wymusza w następnej kratce wystąpienie odpowiedniej cyfry.** W przykładzie 1 każda kratka w łańcuszku jest wypełniona innymi cyframi, dlatego też jeśli w kratce A wystąpi cyfra 2, to w B musi znaleźć się 3, C – 8, D – 1, E – 6, F – 1, G – 5, H – 6, I – 3, zaś w J – 6 (rys. 12). Natomiast, jeśli w kratce A wystąpi 6, to w B znajdzie się 2, C – 3, D – 8, E – 1, F – 6, G – 1, H – 5, I – 6, zaś w J – 3 (rys. 12). W przykładzie 2 wszystkie kratki w sieci były wypełnione dwiema tymi samymi cyframi, przez co cyfry te będą występować na zmianę, tj. jeśli w kratce D wystąpi cyfra 2, to w C musi znaleźć się 6, A – 2, H – 6, F – 2, zaś w G – 6 (rys. 13). Natomiast, jeśli w kratce D wystąpi 6, to w C znajdzie się 2, A – 6, H – 2, F – 6, zaś w G – 2 (rys. 13).
- **Ilość połączeń między kratkami, z których prowadzony jest atak musi być nieparzysta by stwierdzić, że w jednej albo drugiej kratce musi wystąpić jakaś cyfra.** W przykładzie 1 między kratką A i J jest 9 połączeń, co pozwala stwierdzić, że w kratkach tych musi wystąpić cyfra 6 (rys. 12). W przykładzie 2 między kratkami D i G oraz E i G ilość połączeń wynosi 5, dlatego też w tych kratkach muszą równocześnie wystąpić cyfry 2 i 6 (rys. 13).
- **Atakowane kratki muszą leżeć w tym samym wierszu, kolumnie lub kwadracie, co obydwie kratki, z których prowadzony jest atak.** W przykładzie 1 kratki X i Y leżą w tym samym wierszu, co kratka A oraz tym samym kwadracie, co kratka J (rys. 12), podczas gdy w przykładzie 2 kratka X leży w tym samym kwadracie, co kratka E i tej samej kolumnie, co G zaś kratka Y w tej samej kolumnie, co kratka D i tym samym kwadracie, co G (rys. 13).

Metoda X

W lewym górnym kwadracie leży wolna kratka, która jako jedyna na całym diagramie wypełniona jest tylko dwiema cyframi (rys. 15). Cyfry te w kratce A należy uważnie się przyjrzeć, ponieważ jeśli mielibyśmy już cokolwiek wydedukować z tego diagramu, to łatwiej to nam przyjdzie w przypadku kratki wypełnionej tylko dwiema cyframi, aniżeli w kratce znajdowałoby się ich więcej, jak na przykład w kratce G wypełnionej sześcioma cyframi, czy w kratce leżącej obok niej w tym samym wierszu wypełnionej aż siedmioma cyframi (rys. 15).

		5			4			
16789	126789	A	123789	123789		12368	12368	1268
1478	1278	24	123578	6	12578	12358	9	B
3							C	7
	12689	2469	12589	12589	12589	12568	124568	
679	2679	3		4				
			1256789	1256789		125678	125678	12568
679	2679	8				4		
			1235679	123579	125679		123567	1256
5	4	1						9
			23678	2378	2678	23678	23678	
2		D					E	3
	15689	469	156789	15789	156789	156789	145678	
1689	3	7	4					
			12589	125689		125689	12568	12568
F					3			G
14689	15689	469	1256789	125789		1256789	1245678	124568

Rys. 15. Kratka A jako jedyna na całym diagramie jest wypełniona tylko dwiema cyframi: 2 i 4. Jeżeli do kratki tej wpisalibyśmy cyfrę 4, to w pierwszym przypadku w lewym dolnym kwadracie musiałaby ona znaleźć się w kratce F, a następnie w E i B, zaś w drugim przypadku, jeśli w kratce A znalazłaby się cyfra 4, to w prawym górnym kwadracie wystąpiłaby w C, a następnie w G i D. Zatem bez względu na to, w którą stronę rozpatrywalibyśmy konsekwencje wpisania do kratki A cyfry 4, to albo w tym samym wierszu w A i B, albo w tej samej kolumnie w A i D znalazłyby się dwie te same cyfry. Stąd wniosek, że do kratki A nie może być wpisana cyfra 4, a że pozostaje w tej kratce już tylko 2, to można ją wpisać dużą czcionką. Dla ułatwienia, na diagramie zaznaczono szarymi polami wszystkie kratki, w których występuje lub może wystąpić cyfra 4.

Rozważmy konsekwencje wpisania cyfry 4 w kratkę A. W pierwszym przypadku wymusi to wystąpienie cyfry 4 w lewym dolnym kwadracie w kratce F, a następnie w prawym dolnym kwadracie w kratce E, a tym samym w kratce B (rys. 15). W drugim przypadku, jeśli wpisujemy cyfrę 4 w kratkę A, to w prawym górnym kwadracie będzie się ona znajdować w kratce C, a także G i D (rys. 15). Zatem bez względu na to, w którą stronę rozpatrywalibyśmy konsekwencje wpisania do kratki A cyfry 4, to albo w tym samym wierszu w kratkach A i B, albo w tej samej kolumnie w kratkach A i D wystąpią dwie te same cyfry (rys. 15). Z tego wnioskujemy, że do kratki A nie może być wpisana cyfra 4, a ponieważ pozostanie już tylko 2, to można ją wpisać do kratki dużą czcionką (rys. 15).

Konkluzja

Nadszedł czas by samodzielnie porozwiązywać sudoku. A jest co rozwiązywać, bo ilość diagramów sudoku (9×9) wypełnionych cyframi na różne sposoby wynosi blisko $6,7 \times 10^{21}$. Po wyeliminowaniu diagramów różniących się permutacją cyfr, wierszy i kolumn oraz diagramów powstałych przez odbicie lub obrót nadal pozostaje ich ponad pięć miliardów ($\sim 5,5 \times 10^9$). Nawet po uwzględnieniu faktu, by sudoku miało tylko jedno rozwiązanie (np. liczba ujawnionych na początku cyfr nie może być mniejsza od siedemnastu, czy też wśród ujawnionych na początku cyfr może zabraknąć tylko jednej z dziewięciu cyfr) prędzej znudzi się nam ta łamigłówka aniżeli rozwiążemy wszystkie diagramy. A gdyby i tego było mało, to istnieją liczne równie ciekawe jej odmiany, jak chociażby sudoku X, 3D, samuraj, killer, czy kakuro lub sudologIQ, które jest połączeniem sudoku z quizem. Jednak to już materiał na inne opracowania. Poniżej trochę przykładów klasycznego sudoku do rozwiązywania zgodnie z motto: praktyka czyni mistrza. Życzę powodzenia!

Podziękowania

Serdecznie chciałbym podziękować Karolinie Kluk za pomoc w wybraniu najciekawszych diagramów sudoku, które w większości ukazały się w 2005 r. w specjalnym dodatku do tygodnika „Polityka” oraz w dzienniku „Gazeta Wyborcza”.

6		8	4	9	1	2	3
		1	7		2	4	
	2		8		7		5
	1		5		4		8
		3	1		8	7	
4		2	3	7	6	1	5

8	5					6	9
	7			3		1	
			9	1	5		
		2	3		4	6	
7							3
		5	7		8	1	
			1	2	3		
	3			8			7
1	9						3
						5	

		3				2	
	1	7	5		2	8	6
2			4		6		3
5				9			4
	2						1
	8						7
		9				5	
			1	6	3		
				7			

		7	5		3	1	
	2						4
8							9
5				7			8
			9		6		
9				8			6
4							3
	1						7
		6	7		9	2	

	9	3	6	2	8	1	4
	6						5
	3			1			9
	5		8		2		7
	4			7			6
	8						3
	1	7	5	9	3	4	2

9			1			3	4
		1			3		
	2			4			5
2			4				5
		4				6	
	5				6		8
5				6			8
			7			9	
3		7			9		2

5	4					1	8
		3	9		1	6	
	1			3			2
8			3		4		1
		7				5	
6			7		5		4
	5			2			7
		2	6		3	4	
9	6						3 2

2		3					6 4
		9		7			1
				8			7
			2			7	3
4			5		3		1
9		2			7		
3				6			
	8			2		1	
1	2					5	6

						5	9
2		5	1		8		
7				6			4
	8		2		5		3
		1				9	
	3		6		7		1
	6			8			5
			4		3	7	9
	2	4					

			9		7	1	8
8		7	2				
	3						2
7	1		8	4			5
			7		2		
	6			5	1		9 4
9							6
					9	3	7
	2	6	1		3		

			7		1		
9	3					6	7
	1	6				4	5
		9	5		3	2	
	6		9		2		1
		1	8		6	7	
	9	7				3	2
5	2						4 1
			3		5		

			3	1			8
				5		9	
		3	9		2		7
5					4		8
4		7				3	1
	6		8				9
	4		2		6	1	
		9		4			
6				8	1		

		8	3					
				1			2	3
				2	7	9	6	
	6					3		2
	7	9				5	1	
3		2					4	
	3	7	1	9				
4	2			7				
					3	4		

6								5
5			9		8			3
		8	4		1	9		
	8			7			5	
3		6		2		1		4
	2			8			6	
		4	8		3	5		
8			6		7			1
7								8

	4				5			7
	7	5	3					
				6		8		9
3				9			1	
8	1						6	4
	6			4				5
2		6		7				
					3	6	7	
5			2				9	

2								5
	5	9		3		2	1	
		8	2		4	9		
3		4				6		8
				7				
9		7				5		1
		2	5		8	7		
	4	5		9		1	8	
8								3

		1				5		
6			3		5			2
	4		1		2		8	
		2	8		9	3		
1				4				8
		9	2		6	4		
	5		4		8		3	
2			7		3			6
		3				7		

	6							5
5	4		1		2		3	7
			9		3			
3	9		5		4		8	6
8	5		3		7		4	1
			8		6			
4	1		2		9		6	5
	7							1

		1						
3	7	9		2			6	
	2			7	9			8
	6	3			2			
				4				
			7			9	4	
7			6	8			9	
	5			1		7	8	4
						1		

		7	1					8
			9		6			7
				8		9		4
				5		7		3
2		1		6				
8		9		7				
5	7		4		3			
4					5	6		

	3			6	8			
	6		5			4		
7		5						1
		2	8	9			7	
	8						2	
	7			6	1	5		
3						7		2
	5				2		8	
		9	4				3	

				7				3
1					2	4		
	3				8	2		5
	6			9				2
	1						8	
7				8			5	
4		6	5				1	
		1	2					4
3				4				

	3	5				6	9	
8								3
		2	6		4	8		
4				7				9
			9		5			
5				2				7
		6	8		1	4		
3								8
	4	8				7	1	

				7	1	6			
2									4
	3			4		5		7	
	7	2					8	4	
4									7
	5	8					1	9	
	6			3		9		2	
9									5
				6	8	4			

	3		4		1		8	
6			3	8	7			1
	6	7				1	3	
			2		6			
	9	8				7	2	
8			7	1	4			3
	2		8		5		9	

	1	4	6					
			4					8
			9	3		7		6
	9	6				2		4
2		8				9	1	
4		3		8	9			
9					6			
					2	6	9	

	5			9			1	
		9		1		8		
6	2						7	9
		5	9		7	2		
		4	8		5	1		
2	4						9	3
		3		8		4		
	9			7			8	

3								6
7		4				8		2
			2		4			
5	9		3		2		8	1
4	2		7		8		5	9
			4		3			
6		1				9		8
8								5

6	7			8				
					7			2
		9	4	5		8		
	5					2		
4		1				6		9
		2					8	
		6		9	8	5		
2			5					
8				1			9	7

	2		1		6			
			5			3		6
	5			3	9			
6		9					5	2
		2				9		
4	3					7		8
			9	8			1	
8		1			7			
			6		3		4	

		3			4		6	7
1			6				9	
		5	2	3				
	5	6						
			9	4	2			
						3	8	
				7	9	8		
	3				1			9
8	7		4			6		

4		3		7		1		2
	6			5			7	
			2		3			
	8	2				5	6	
	5	1				2	9	
			8		7			
	2			4			3	
8		6		2		7		5

			7		1			
		4				7		
7	1		8		3		4	2
4		2				6		1
				3				
5		7				8		4
2	5		3		8		7	6
		1				2		
			9		2			

3			6				9	5
6	5						8	
				7	4			
		5		8				1
		2	4		3	5		
9				6		2		
			3	4				
	4						7	3
8	3				7			2

							9	1
2	1		8				3	
				3	5		8	2
			4					5
				6				
7					8			
	7		3	4				
	4				2		5	7
9	3							

				1	5		8	4	
									3
4		5	7						1
1	4	8							
	6							2	
							6	8	7
6					9		7		8
9									
	2	3		8	6				

5					4			7
	8					4		
		2	9					5
6		5		7			8	
		1				2		
	3			1		7		9
1					6	5		
		4					2	
9			8					3

	9			5		4		
		4						
1					4	8		
	6	2			1		5	
			6	7	2			
	3		8			2	7	
		3	5					1
						6		
		5		2			9	

		6	3		5	4		
9								2
	7						3	
7			5		4			9
	3						8	
2			8		9			3
	1						9	
8								7
		2	9		8	5		

					4	8	6	3
1	6						5	
		8	6	5				
2		5						
				7				
						3		
				8	7	2		
	8						9	4
6	7	1	2					

			2			8		4
					8		3	9
			6					5
	1			5			6	
9		4				3		7
	6			2			9	
8					3			
7	9		4					
6		2			1			

		7			2			
	4			6		7		
		9	1	5		2		
						8		
9	7						3	5
		4						
		3		9	6	1		
		2		4			7	
			8			9		

			4	7			2	
4					9			
3				8		6		
	5	9		1	8	2		
		8	7	4		1	5	
		6		3				5
			2					7
	3			5	7			

	5				7			3
1			8	3				
		4		1	5			
			7				5	9
			8				6	
2	7				4			
			5	7		9		
				8	1			5
3			2				6	

						8		2
				9				
3					8	4	6	
	2			8	5		7	9
	9						3	
5	6		9	2			8	
	1	2	6					8
				7				
8		4						

				1		7		
6				5		1	9	
		3					4	
		9	6				3	
			1		7			
	7				9	2		
	5					3		
	8	7		6				4
		2		9				

7								
	4				5		9	
			3		6	2		8
					2	7	5	
8				1				4
	6	5	9					
1		3	4		8			
	8		1				4	
								7

2	3							9
1					3	2		
	8			4	9			
					5			3
		5		3		4		
6			7					
			9	8			7	
		2	6					5
4							9	2

2	3						9
1				3	2		
	8			4	9		
				5			3
		5		3		4	
6			7				
			9	8			7
		2	6				5
4						9	2

						8		
3				2			5	
	1	5		4	9			
1			4	5		6		8
4		3		8	6			7
			9	6		5	4	
	4			1				2
		2						

	2	7	4					
5	1		2	6				9
9								
						7		
	7	3				8	1	
		5						
								3
2				9	3		6	7
					7	4	5	

1				7	9		2	
	3		2					4
			3				9	
3	5							
7		8				2		9
							5	1
	1				8			
5					6		7	
	6		5	1				2

	4					8		
3			1		2			9
5			7		4			6
8		5		3		6		2
	7						3	
4		2		1		7		8
6			9		3			5
7			8		6			1
	9							6

	4		6	8				
		8	7	9				1
					3		6	
		3					5	2
9	5						4	6
4	1					7		
	9		8					
2				7	9	3		
				3	5		8	

		5		11			2	4			14		10		
	9		8			6			1			2		7	
14		11			3					6			8		15
	1			13			7	10			16			12	
11			4			5			3			13			6
		12			15					13			16		
	15			7			11	9			12			1	
6			13			12			11			3			14
10			3			14			16			5			8
	2			5			8	13			6			9	
		15			16					12			6		
13			11			1			14			7			2
	7			12			4	8			9			15	
8		16			10					3			11		5
	14		1			9			15			8		2	
		6		2			16	12			1		3		

Koniec